

Принцип на Дирихле (Принцип на чекмеджетата)

Веселин Дренски
ИМИ – БАН, София
e-mail: drensky@math.bas.bg

10 февруари 2018 година

През 80-те години на миналия век към Клуба на ТНТМ (Техническо и научно творчество на младежта) при ЕЦММ (Единния център по математика и механика, който обединяваше математиците, информатиците и механиците от БАН и Софийския университет) съществуваше *Задочна школа по математика*. В работата на Школата участваха активно както учени и преподаватели от ЕЦММ, така и студенти от Факултета по математика и механика на Софийския университет. Те разпращаха на учениците от Задочната школа брошури с различни теми по математика. Учениците трябваше да решат поставените в темите задания и да пратят решенията до Школата, след което получаваха обратно коментарии за допуснатите грешки.

Принципът на Дирихле е една от тези теми, съставена от докладчика през 1983 г. През август 2013 г., след направени някои дребни добавки и изменения, темата беше използвана за занятията с Лятната школа на УЧИМИ във Варна.

За основа на брошурата послужи книгата *“Принцип на Дирихле”* на *Иван Проданов*, библиотека “АЛЕФ”, София, 1975 г.

Освен това бяха използвани материали от подготовката на българския отбор за международните олимпиади по математика, от списание *“Математика”*, от международните, републиканските и московските олимпиади по математика и др.

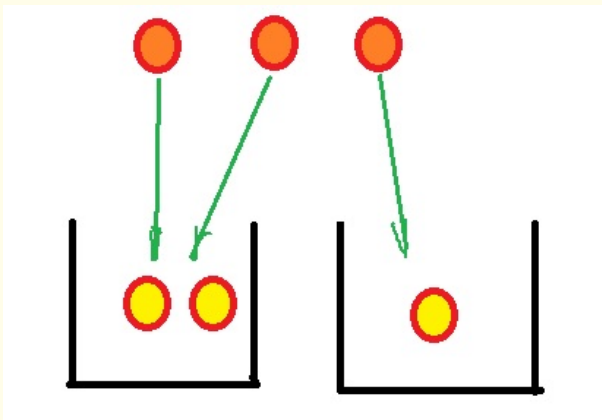


Иван Проданов

През XIX век в един френски вестник се появило сензационно съобщение: *“В Париж има двама души с еднакъв брой косми на главата си.”* Наистина, съгласно данни от медицината, на главата си всеки човек има не повече от 150 000 косъма. Следователно, ние можем да разделим жителите на Париж на 150 001 групи, съобразно количеството коса на главата на всеки от тях, започвайки от 0, 1, 2, ... и стигайки до 150 000 косъма. Тъй като по това време във френската столица са живеели около 800 000 души и това число е по-голямо от 150 001, то непременно поне двама души ще попаднат в една и съща група, т.е. ще бъдат с един и същи брой косми на главата си.

Принцип на чекмеджетата или принцип на Дирихле

В горния пример ние използвахме така наречения *принцип на Дирихле*, чиято най-проста и най-популярна формулировка е:
Нека m топки са поставени в n чекмеджета и $m > n$. Тогава поне в едно чекмедже ще има поне две топки.



Принципът на чекмеджетата може да бъде илюстриран и с торта, която да бъде изядена след доклада.



Съвместно кулинарно произведение на докладчика и доц. Цецка Рашкова от Университета в Русе.

Първата формализация на този принцип е направена от немския математик Петер Густав Лъожон Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet), който го използва за получаване на дълбоки резултати в теорията на числата. (Смята се, че това е направено през 1834 г., но обикновено се цитират статии от 1842 г.)



Теорема на Дирихле от теорията на диофантовите апроксимации

За всяко реално число α и за всяко естествено число Q съществуват цели числа a и q такива, че

$$|a - \alpha q| < \frac{1}{Q}, \quad 0 < q \leq Q.$$

В по-късна статия Дирихле използва немския термин *Schubfachprinzip* – принцип на чекмеджетата. Това име се запазва и на редица други езици, включително на английски: *Pigeonhole Principle*. (Едно от значенията на думата *pigeonhole* е картотека или преграда за писма в писалище.)



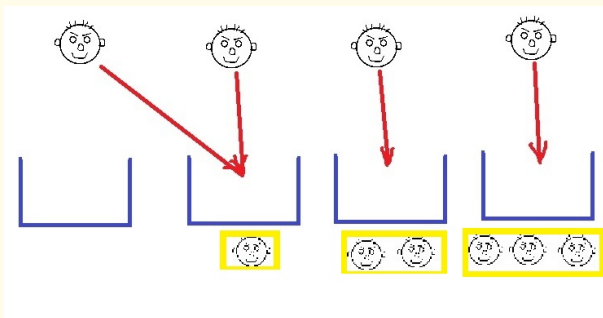
Pigeonhole

Задача 1.

В един клас някои от учениците са приятели помежду си. Да се докаже, че има двама ученика с един и същи брой приятели.

Решение.

Трябва да решим кои са “топките” и кои са “чекмеджетата”. Очевидно е, че учениците трябва да са “топки”, защото се иска двама ученика да имат едно и също свойство. Нека приемем, че в класа има n ученика. Освен това, лесно е да се съобрази, че “чекмеджетата” трябва да са номерирани с числата от $0, 1, \dots, n - 1$, в зависимост от това колко приятели има всеки съученик.



Всичко щеше да бъде наред, ако топките бяха повече от чекмеджетата. За съжаление, поне засега, това не е така: Имаме n ученика и n възможности за броя на техните приятели.

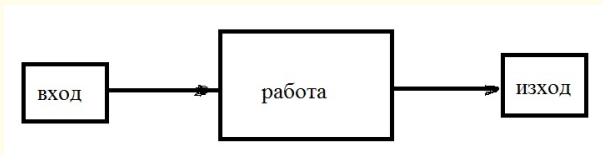
Възможно ли е всяка топка да попадне в различно чекмедже? С други думи, може ли n -те ученика да имат n различен брой приятели? Ако това е така, то ще има ученик A с нула приятели и ученик B с $n - 1$ приятели. Това означава, че останалите $n - 1$ ученика са приятели на ученика B , включително ученикът A , който няма нито един приятел. Тъй като това е невъзможно, имаме два варианта: Или няма ученик без приятели (и чекмеджетата са номерирани с числата от 1 до $n - 1$) или няма ученик, на когото всички останали ученици са приятели (и чекмеджетата са номерирани с числата от 0 до $n - 2$). И в двата случая можем да приложим принципа на чекмеджетата и да докажем, че има двама ученика с един и същи брой приятели.

Задача 2.

В равнината са дадени n точки, $n \geq 2$, някои от които са съединени с отсечки. Да се докаже, че има поне две точки, които са краища на един и същи брой отсечки.

Сигурно забелязвате, че това е същата задача като предишната, но формулирана по друг начин.

Как работи принципът на Дирихле



Минимални входни данни

Изход: Има такъв обект,
но не знаем кой е

Алгоритъм

Предварителна работа (кои са чекмеджетата и топките).



Хвърляне на топките в чекмеджетата.



Има поне две топки в едно чекмедже.



Изводи: Има такъв обект, но не знаем кой е.

По-обща форма на принципа на Дирихле.

Нека t топки са поставени в n чекмеджета и $t > kn$. Тогава поне в едно чекмедже ще има поне $k + 1$ топки.

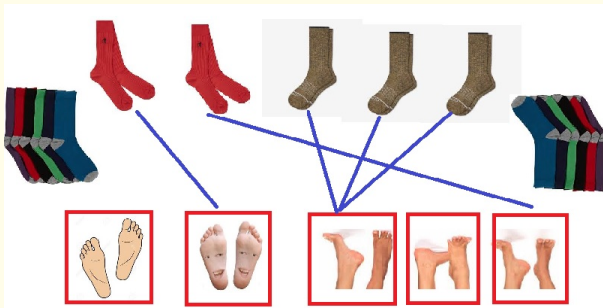
Задача 3.

Една стоножка решила да си купи по случаен начин сини, червени, зелени и кафяви чорапи. Колко чифта трябва да си купи, за да е сигурна, че ще може да обуе на всичките си крака чорапи от един и същи цвят? (Приемете, че стоножката има 50 чифта крака.)

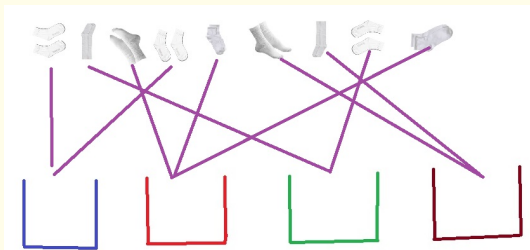


Въпрос.

Кои са чекмеджетата и кои са топките?



НЕВЯРНО!



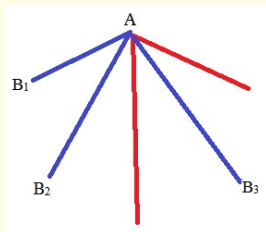
ВЯРНО!

Задача 4.

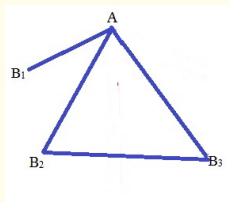
В равнината са дадени 6 точки. Отсечките, които ги съединяват, са оцветени в червено и синьо. Да се докаже, че три от точките са върхове на триъгълник, чиито страни са оцветени в един и същи цвят.

Решение.

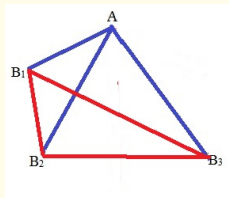
Фиксираме една от точките A и разглеждаме петте отсечки, излизащи от нея. Тъй като тези отсечки са оцветени в два цвята, то поне три от тях ще са едноцветни, например AB_1, AB_2, AB_3 са сини.



Ако някоя от отсечките B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_1 е синя, то ще има триъгълник с едноцветни (сини) страни и с връх в точката A .



Ако и трите отсечки B_1B_2 , B_2B_3 , B_3B_1 са червени, то търсеният триъгълник с едноцветни (червени) страни ще бъде с върхове B_1 , B_2 , B_3 .



Задача 5.

Дадени са 101 естествени числа, ненадминаващи 200. Да се докаже, че две от тези числа имат свойството, че едното от тях дели другото.

Решение.

Всяко цяло число a се представя във вида $a = 2^k b$, $k \geq 0$, а b е нечетно. За дадените 101 числа, числата b от това представяне приемат 100 стойности – нечетните числа от 1 до 199.

Следователно, съществуват две числа a_i и a_j , за които $a_i = 2^k b$, $a_j = 2^l b$. Нека например $k \geq l$. Тогава $a_j | a_i$.

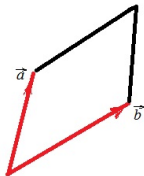
Задача 6.

Спрямо правоъгълна координатна система в равнината са дадени 5 точки с цели координати. Да се докаже, че три от тези точки са върхове на триъгълник с целочислено лице.

Решение.

Нека в равнината са дадени два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Известно е, че ако построим успоредник с две съседни страни $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то лицето на този успоредник е равно на

$$\Delta(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

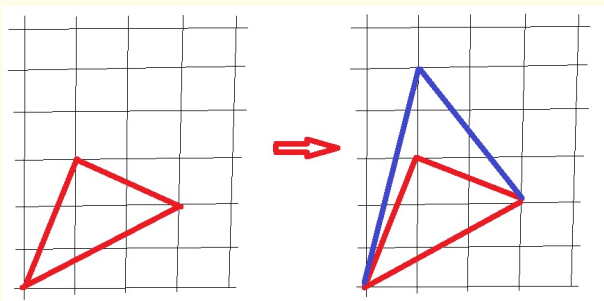


Оттук лесно се извежда, че лицето на триъгълник с върхове $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ се задава с формулата

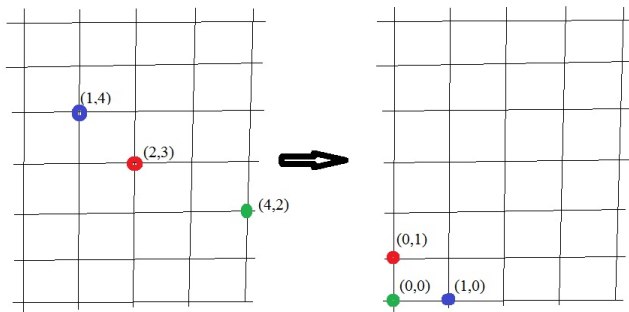
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \Delta(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}),$$

където $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

Следователно, ако променим координатите на една от точките с цели координати A, B, C с 2 единици, то лицето на триъгълника се променя с цяло число.



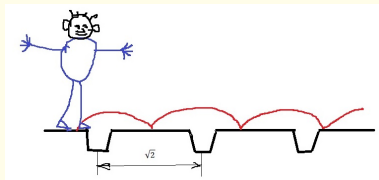
Чрез последователни трансляции на петте точки с цели координати на разстояния, кратни на 2 и успоредно на координатните оси, можем да направим така, че петте точки да имат координати 0 и 1.



Но в равнината има само 4 точки с такива координати: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Тъй като са дадени 5 точки, съгласно принципа на Дирихле поне две от точките ще съвпадат, т.е. заедно с още една точка ще образуват изроден триъгълник с лице 0. Следователно, трите точки, които след серията от транскации са станали върхове на този изроден триъгълник, определят триъгълник с целочислено лице.

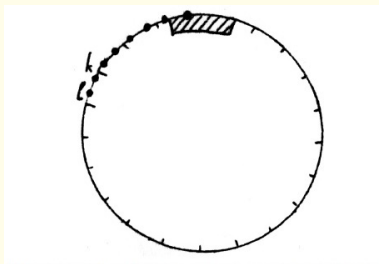
Задача 7.

Върху реалната права са изкопани канавки с дължина d и на разстояние $\sqrt{2}$ една от друга. Един човек се движи по правата с крачка с дължина 1. Да се докаже, че човекът непременно ще стъпи в канавка.



Решение.

“Навиваме” реалната права върху окръжност с дължина $\sqrt{2}$, при което всички канавки ще попаднат една върху друга.



Тъй като $\sqrt{2}$ е ирационално число, то никои две стъпки на човека няма да съвпадат. Разделяме окръжността на n равни дъги, където n е толкова голямо, че дължината $\sqrt{2}/n$ на дъгичката е по-малка от дължината на канавката. Тъй като дъгичките са краен брой, а стъпките на човека са безбройно много, то непременно ще има две стъпки, които са в една и съща дъгичка. (На чертежа те са означени с k и l .) Нека $k > l$. Започвайки от стъпката с номер l , ние ще следим къде стъпва човекът в момента $l, l + (k - l), l + 2(k - l), \dots$. Нашата задача се свежда до следната: *Върху окръжността се движи човек със стъпка с дължина, по-малка от $\sqrt{2}/n$, а следователно и от d . Да се докаже, че той непременно ще падне в канавката.* Но така формулирано, твърдението става очевидно.

Определение.

Едно множество от реални числа се нарича *гъсто*, ако всеки интервал (a, b) съдържа елементи от това множество.

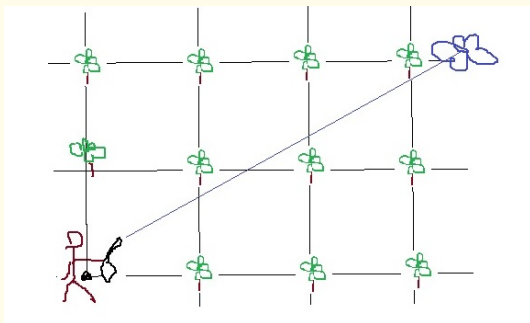
Всъщност ние доказахме:

Теорема на Кронекер (Kronecker)

За произволно ирационално число α множеството от числата $t\alpha + n$, където t е произволно цяло, а n произволно естествено число, е навсякъде гъсто.

Задача 8.

В точките с цели координати в равнината, различни от началото на координатната система, са посадени дръвчета с един и същи диаметър. Стрелец се намира в началото на координатната система и стреля в произволна посока. Да се докаже, че той непременно ще улови дръвче.



Упътване.

Разгледайте тангенса на ъгъла, който посоката на стрелба сключва с една от координатните оси. Ако това число е рационално, то стрелецът ще улови някое дръвче точно в средата. В противен случай приложете теоремата на Кронекер.

Задача 9.

Да се докаже, че съществува степен на 2, която в десетичен запис започва с 2018.

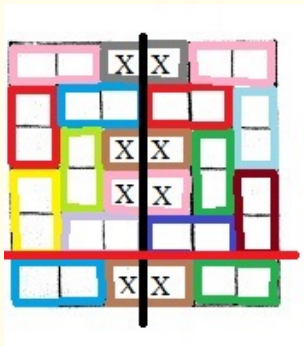
Упътване.

Тъй като $\lg 2$ е ирационално число, използвайте, че има естествено число m и цяло n такива, че

$$\lg 2018 < m \lg 2 - n < \lg 2019.$$

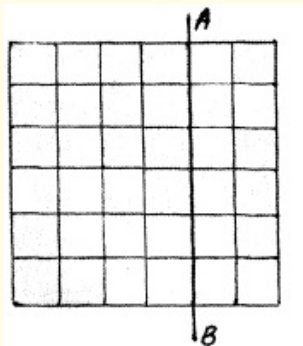
Задача 10.

Шахматна дъска с размери 6×6 е покрита с плочки от домино по такъв начин, че всяка плочка покрива точно две квадратчета. Да се докаже, че съществува права, която разделя дъската и не пресича нито една от плочките във вътрешна точка.

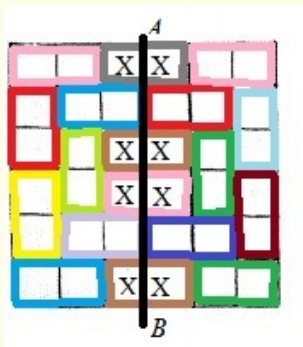


Решение.

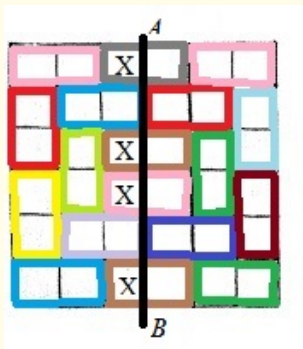
Съществуват само пет хоризонтални и пет вертикални прави, които пресичат дъската и имат шансове да не пресичат плочките от домино. Ще покажем, че всяка от тези прави пресича четно число плочки.



Вляво от правата AB се намират четно число квадратчета. Освен това, плочките, които лежат изцяло вляво от тази права, също покриват четно число квадратчета. Следователно, за плочките, които се пресичат от AB също остават четно число квадратчета.



Но за всяка такава плочка, вляво от AB се намира само едно квадратче, покрито от нея. Ето защо, правата AB пресича четно число плочки.



Ако всяка от десетте разглеждани прави пресича плочка, то тя ще пресича поне две плочки, т.е. ще бъдат пресечени поне $2 \times 10 = 20$ плочки. Но това е невъзможно, тъй като има само $36 : 2 = 18$ плочки, а една плочка може да бъде пресечена само от една права.